KAPITEL 1

Martingale

1.1. Stochastische Prozesse

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Das heißt, Ω ist eine Menge, $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra auf Ω, und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, F). Zuerst erinnern wir an die Definition einer Zufallsvariable.

Definition 1.1.1. Eine *Zufallsvariable* ist eine messbare Funktion $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Die Messbarkeit heißt, dass $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für jede Borel–Menge $B \subset \mathbb{R}$.

Interpretation: Jedem Ausgang $\omega \in \Omega$ des Zufallsexperiments entspricht die Zahl $\xi(\omega)$, die als Realisierung der Zufallsvariable bezeichnet wird.

Stochastischer Prozess ist eine andere Bezeichnung für eine zufällige Funktion.

Definition 1.1.2. Sei T eine beliebige nichtleere Menge (die als *Indexmenge* oder *Zeitbereich* des stochastischen Prozesses bezeichnet wird). Ein *stochastischer Prozess* ist eine Familie $(X_t)_{t\in T}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Interpretation: Es sei $\omega \in \Omega$ ein Ausgang unseres Zufallsexperiments. Diesem Ausgang entspricht die folgende reellwertige Funktion auf T:

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad t \in T.$$

Diese Funtion heißt *Realisierung* oder *Pfad* des stochastischen Prozesses zum Ausgang ω.

Die Variable $t \in T$ kann man z.B. als "Zeit" auffassen. So könnte X_t für den Preis einer Aktie zum Zeitpunkt $t \geq 0$ stehen. Manchmal ist aber eine Interpretation von t als "Raum" sinnvoll. So könnte X_t z.B. die Lufttemperatur am Ort t bezeichnen. Ist $T = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$, so sprechen wir von einem Prozess mit *diskreter Zeit*. Ist $T = \mathbb{R}, [a, b], \mathbb{R}^d$, so hat der Prozess kontinuierliche Zeit. Im Rest dieses Kapitels betrachten wir Prozesse mit diskreter Zeit.

1.2. Filtrationen

Definition 1.2.1. Eine aufsteigende Folge $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ von σ-Algebren heißt *Filtration*.

Interpretation: Liegt ein Ereignis A in der σ-Algebra $\mathcal{F}_n$, so heißt es, dass wir zum Zeitpunkt n bereits wissen, ob dieses Ereignis eingetreten ist oder nicht. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_n$ beschreibt somit die "Information" über den Ausgang des Zufallsexperiments, die zum Zeitpunkt n vorliegt.

Beispiel 1.2.2. 09.10.2017 = 282. Tag des Jahres 2017.

- Ereignis "der mittlere Ölpreis im August 2017 lag unter 40$" liegt in $\mathcal{F}_{282}$.
- Ereignis "der mittlere Ölpreis in 2017 lag unter 40$" liegt nicht in $\mathcal{F}_{282}$ (man weiß es am 09.10 noch nicht!)

Der Quadrupel $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ heißt ein *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.*

Definition 1.2.3. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *adaptiert* bezüglich Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Zufallsvariable X_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist.

Interpretation: Der Wert von X_n kann anhand der Information, die zum Zeitpunkt n vorliegt, bestimmt werden.

Definition 1.2.4. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess. Die *natürliche Filtration* von X ist $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Interpretation: Zum Zeitpunkt besteht unsere Information aus den Werten $X_0(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Jeder stochastische Prozess X ist adaptiert bezüglich seiner natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

1.3. Martingale

Im Folgenden betrachten wir einen stochastischen Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in diskreter Zeit und stellen uns X_n als den kumulativen Gewinn zum Zeitpunkt n in einem Glücksspiel vor. So ist z.B. X_0 das Startkapital, mit dem das Spiel begonnen wird. In der folgenden Definition wird beschrieben, was es heißt, dass ein Glücksspiel "*fair*" ist.

Definition 1.3.1. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ heißt ein *Martingal*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) X_n ist $\mathcal{F}_n$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(2) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(3) $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ f.s. für alle $n = 0, 1, \ldots$.

Interpretation: Die erste Bedingung verlangt, dass der Gewinn zum Zeitpunkt n nur durch die Information bestimmt wird, die zum Zeitpunkt n vorliegt. Um die dritte Bedingung zu interpretieren, stellen wir uns vor, dass wir uns zum Zeitpunkt n entscheiden sollen, ob wir den aktuellen Gewinn X_n beibehalten, oder weiterspielen. Da uns bereits alle Informationen über den Spielverlauf bis zum Zeitpunkt n vorliegen, ist der erwartete Gewinn zum Zeitpunkt $n + 1$ (falls wir nicht aufhören) durch den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ gegeben. Bei einem "fairen" Spiel sollte es im Mittelwert keinen Unterschied machen, ob wir aussteigen oder weiterspielen, d.h. es sollte $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ gelten. Dies ist genau die dritte Bedingung aus der obigen Definition.

Wir betrachten nun zwei Beispiele von Martingalen.

Beispiel 1.3.2 (Irrfahrt mit Erwartungswert 0)**.** Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\xi_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ und die Folge der Partialsummen

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad S_0 = 0.$$

Dann ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal. Wir überprüfen Bedingung (3):

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + 0 = S_n.$$

Dabei haben wir benutzt, dass S_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist, weshalb $\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$, und dass ξ_{n+1} von $\mathcal{F}_n$ unabhängig ist, weshalb $\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\xi_{n+1} = 0$.

Beispiel 1.3.3 (Geometrische Irrfahrt mit Erwartungswert 1)**.** Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\xi_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ und die geometrische Irrfahrt

$$T_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n, \quad T_0 = 1.$$

Dann ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal (Übung).

> **Aufgabe 1.3.4.** Zeigen Sie, dass Eigenschaft (3) aus der Definition des Martingals zur folgenden Bedingung äquivalent ist: $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Ein Martingal ist ein faires Spiel. Analog können wir "nachteilige" und "vorteilhafte" Spiele definieren.

Definition 1.3.5. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt ein *Supermartingal* (nachteiliges Spiel), wenn die obigen Bedingungen (1), (2) gelten, sowie

(3−) $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$ f.s. für alle $n = 0, 1, \ldots$.

Definition 1.3.6. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt ein *Submartingal* (vorteilhaftes Spiel), falls die obigen Bedingungen (1), (2) gelten, sowie

(3+) $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ f.s. für alle $n = 0, 1, \ldots$.

Bemerkung 1.3.7. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Supermartingal genau dann, wenn $(-X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Submartingal ist. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ is ein Martingal genau dann, wenn $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichzeitig ein Submartingal und Supermartingal ist.

Lemma 1.3.8. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$, dass

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m \text{ f.s.}$$

Beweis. Für $m = n$ ist die Aussage klar, nämlich $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] = X_n$ wegen der $\mathcal{F}_n$-Messbarkeit von X_n. Sei also $m < n$ und somit $m \leq n-1$ sowie $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{n-1}$. Indem wir zuerst die Turmeigenschaft und dann die Martingaleigenschaft benutzen, erhalten wir

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_m].$$

Nun können wir induktiv weitermachen, bis wir irgendwann erhalten, dass

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_m] = \ldots = \mathbb{E}[X_{m+1}|\mathcal{F}_m].$$

Der Erwartungswert auf der rechten Seite ist gleich X_m wegen der Martingaleigenschaft. □

Korollar 1.3.9. Ein Martingal hat stets einen konstanten Erwartungswert, nämlich

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0 \text{ für alle} n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Aus Lemma 1.3.8 folgt, dass $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_0] = X_0$. Nun benutzen wir die Turmeigenschaft des bedingten Erwartungswertes:

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}X_0. \quad \square$$

Aufgabe 1.3.10. Für ein Submartingal gilt $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \geq X_m$ für alle $m \leq n$, sowie $\mathbb{E}X_n \geq \mathbb{E}X_0$.

1.4. Vorhersagbare Prozesse

Sei $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ eine Filtration auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definition 1.4.1. Ein stochastischer Prozess $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ohne C_0) heißt *vorhersagbar* (englisch: previsible), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable C_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist.

Interpretation: Stellen wir uns wieder ein Glücksspiel vor, in dem der kumulative Gewinn zum Zeitpunkt n durch einen stochastischen Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ modelliert wird. Somit ist der Gewinn zwischen den Zeitpunkten $n-1$ und n gegeben durch $X_n - X_{n-1}$. Den Prozess C_n denken wir uns als eine "Strategie", nämlich wir stellen uns vor, dass wir zwischen den Zeitpunkten $n-1$ und n einen Einsatz von C_n machen. Unser Gewinn in diesem Intervall berechnet sich dann zu $C_n \cdot (X_n - X_{n-1})$. Der Einsatz C_n muss aber bereits zum Zeitpunkt $n-1$ bekannt sein (wir können nicht sagen, dass wir einen großen Einsatz machen, wenn wir im nächsten Augenblick gewinnen), daher muss mann fordern, dass C_n eine $\mathcal{F}_{n-1}$-messbare Zufallsvariable sein soll.

Definition 1.4.2. Der Gesamtgewinn zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ ist

$$Y_n \stackrel{\text{def}}{=} (C \circ X)_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot (X_k - X_{k-1}), \quad Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Der nächste Satz behauptet, dass der Gesamtgewinn in einem fairen Spiel ein Martingal ist.

Satz 1.4.3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine vorhersagbare Strategie. Sei außerdem C_n beschränkt.[1] Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal.

Bemerkung 1.4.4. Insbesondere gilt $\mathbb{E}Y_n = 0$. Das heißt, eine noch so ausgeklügelte Strategie erlaubt es uns nicht, einen Gewinn in einem fairen Spiel zu erzielen!

Beweis. Es folgt direkt aus der Definition von Y_n, dass es $\mathcal{F}_n$-messbar ist. Außerdem ist die Zufallsvariable $C_k(X_k - X_{k-1})$ integrierbar, denn $X_k - X_{k-1}$ ist integrierbar und $|C_k| \le K_k$ ist beschränkt, somit

$$\mathbb{E}|C_k(X_k - X_{k-1})| \le \mathbb{E}[K_k|X_k - X_{k-1}|] \le K_k\mathbb{E}|X_k - X_{k-1}| < \infty.$$

Also ist Y_n integrierbar. Es bleibt, Bedingung (3) aus der Definition eines Martingals nachzurechnen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] - Y_{n-1} = \mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[C_n \cdot (X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= C_n\, \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = C_n \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

wobei wir die $\mathcal{F}_{n-1}$-Messbarkeit von C_n benutzt haben, sowie die Identität $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} = 0$, die aus der Martingaleigenschaft von (X_n) folgt. □

Bemerkung 1.4.5. Die Bedingung der Beschränkheit von C_n braucht man, um Integrierbarkeit von Y_n zu zeigen. Diese Bedingung kann durch andere Bedingungen ersetzt werden. So gilt z.B. nach der Hölder–Ungleichung, dass

$$\mathbb{E}|C_k(X_k - X_{k-1})| \le (\mathbb{E}|C|^p)^{1/p} \cdot (\mathbb{E}|X_k - X_{k-1}|^q)^{1/q}$$

für alle $p, q \ge 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es reicht also zu fordern, dass $C_n \in L^p$ und $X_n \in L^q$. Zum Beispiel bleibt die Aussage des obigen Satzes gültig, wenn C_n und X_n quadratisch integrierbar sind ($p = q = 2$).

Aufgabe 1.4.6. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal und $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar und beschränkt. Es gelte zusätzlich $C_n \ge 0$. Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls ein Submartingal.

1.5. Stoppzeiten

[1] d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gebe es ein K_n mit $|C_n(\omega)| \le K_n$ für alle $\omega \in \Omega$.

Definition 1.5.1. Eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ heißt eine *Stoppzeit* bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, wenn

$$\{T \le n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Interpretation: T ist der Zeitpunkt, zu dem wir aus dem Spiel aussteigen. Das Ereignis $\{T \le n\}$ bedeutet: wir hören spätestens zum Zeitpunkt n auf. Ob dieses Ereignis eintritt oder nicht, müssen wir zum Zeitpunkt n bereits wissen. (Wir können nicht sagen: wir hören jetzt auf, wenn wir in der nächsten Runde verlieren).

Aufgabe 1.5.2. Zeigen Sie: T ist eine Stoppzeit dann und genau dann, wenn

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel 1.5.3. Seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_n = \pm 1] = 1/2$. Betrachte die natürliche Filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Folgende Zufallsvariablen sind Stoppzeiten:

(a) "Stoppe nach der ersten +1": $T = \min\{n \in \mathbb{N} : \xi_n = +1\}$.
(b) "Stoppe nach der zweiten +1": $T = \min\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\xi_k = +1} = 2\}$.
(c) "Stoppe nach zwei aufeinanderfolgenden Einsen": $T = \min\{n \ge 2 : \xi_n = \xi_{n-1} = +1\}$.

Keine Stoppzeit hingegen sind:

(d) "Stoppe vor der ersten +1": $T = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \xi_{n+1} = +1\}$.
(e) "Stoppe nach der letzten +1 im Intervall $\{1, \dots, 100\}$" $T = \max\{1 \le n \le 100 : \xi_n = 1\}$.

Entscheiden wir uns, zum Zeitpunkt T aufzuhören, so bleibt unser Gewinn nach diesem Zeitpunkt konstant gleich X_T. Dies führt zu folgender

Definition 1.5.4. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess und $T : \Omega \to \{0, 1, \dots, +\infty\}$ eine Stoppzeit. Der *gestoppte Prozess* $(X_n^T)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist definiert durch

$$X_n^T = \begin{cases} X_n, & \text{falls } T \ge n, \\ X_T, & \text{falls } T \le n \end{cases} = X_{T \wedge n}.$$

Dabei bezeichnet $T \wedge n = \min(T, n)$ das Minimum von T und n.

1.6. Optional stopping und optional sampling

Keine noch so ausgeklügelte Ausstiegsstrategie vermag es, ein faires Spiel in ein vorteilhaftes Spiel zu verwandeln. Dies ist die Behauptung des folgenden Satzes.

Satz 1.6.1 (Optional stopping theorem von Doob)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit. Dann ist der gestoppte Prozess $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls ein Martingal. Insbesondere gilt $\mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[X_{T\wedge 0}] = \mathbb{E}[X_0]$.

Beweis. Betrachte die folgende Strategie: bis zum Zeitpunkt T machen wir jeweils einen Einsatz von 1, nach T steigen wir aus dem Spiel aus. Das heißt,

$$C_n = \mathbb{1}_{n\le T} = \begin{cases} 1, & \text{falls } T \ge n, \\ 0, & \text{falls } T \le n-1. \end{cases}$$

Diese Strategie ist vorhersagbar, denn $\{C_n = 0\} = \{T \le n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ und $\{C_n = 1\} = \{C_n = 0\}^c$. Gemäß Satz 1.4.3 ist

$$(C \circ X)_n = X_{T\wedge n} - X_0$$

ein Martingal. Die Martingaleigenschaft dieses Prozesses kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbb{E}[(X_{T\wedge n} - X_0) - (X_{T\wedge(n-1)} - X_0)|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

Indem wir X_0 kürzen, erhalten wir

$$\mathbb{E}[X_{T\wedge n} - X_{T\wedge(n-1)}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

was die Martingaleigenschaft des gestoppten Prozesses $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ beweist. □

Bemerkung 1.6.2. Genauso lässt sich zeigen, dass ein gestopptes Submartingal/Supermartingal ein Submartingal/Supermartingal ist.

Satz 1.6.3 (Optional sampling theorem von Doob)**.** Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit. Dann gilt:

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$$

vorausgesetzt, dass eine der folgenden Bedingungen gilt:

(a) T ist beschränkt[2] *oder*
(b) X ist gleichmäßig beschränkt[3] und $T < \infty$ f.s. *oder*
(c) X hat gleichmäßig beschränkte Zuwächse[4] und $\mathbb{E}T < \infty$

Beweis. Gemäß Satz 1.6.1 gilt $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir interessieren uns aber für $\mathbb{E}X_T$.

Beweis unter (a). Sei $T \le N$. Indem wir $n = N$ setzen, erhalten wir, dass

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_{T\wedge N} = \mathbb{E}X_0.$$

Beweis unter (b). Aus $T < \infty$ f.s. folgt, dass

$$X_{T\wedge n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_T \text{ f.s.}$$

[4] d. h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $T(\omega) < N$ für alle $\omega \in \Omega$.
[4] d. h. es gibt ein $K > 0$ mit $|X_n(\omega)| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega$.
[4] d. h. es gibt ein $\exists K > 0$ mit $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$.

Außerdem gilt wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von X, dass $|X_{T(\omega)\wedge n}(\omega)| < K$ für alle $\omega \in \Omega$. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_T.$$

Wegen $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0$ folgt die Behauptung.

Beweis unter (c). Es gilt nach wie vor

$$X_{T\wedge n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_T \text{ f.s.}$$

Wir zeigen, dass die Folge $(|X_{T\wedge n}|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch eine integrierbare Zufallsvariable dominiert wird. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Zuwächse gilt

$$|X_{T\wedge n} - X_0| = \left|\sum_{n=1}^{T\wedge n}(X_n - X_{n-1})\right| \leq \sum_{n=1}^{T\wedge n} |X_n - X_{n-1}| \leq K(T\wedge n) \leq KT.$$

Also folgt, dass $|X_{T\wedge n}| \leq |X_0| + KT$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wobei die obere Schranke integrierbar ist, denn $\mathbb{E}[|X_0|+KT] < \infty$ wegen $\mathbb{E}T < \infty$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz ergibt sich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_T.$$

Wegen $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0$ folgt die Behauptung. □

Aufgabe 1.6.4. Für Submartingale gilt unter einer der obigen Bedingungen (a), (b) oder (c), dass $\mathbb{E}X_T \geq \mathbb{E}X_0$.

Aufgabe 1.6.5. Sei $(X)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal und $T \leq N$ eine beschränkte Stoppzeit. Dann gilt $\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_N$.

In den folgenden Beispielen zeigen wir, dass es nicht möglich ist, auf Bedingungen (a), (b), (c) komplett zu verzichten. Es ist also möglich, in einem fairen Spiel durch die richtige Wahl der Ausstiegszeit einen Gewinn zu erzielen!

Beispiel 1.6.6. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_1 = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Die einfache Irrfahrt $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ mit Startpunkt $S_0 = 0$ ist ein Martingal. Betrachte die Stoppzeit $T = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\}$. Es gilt offenbar, dass $S_T = 1$. Somit ist $\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}1 = 1 \neq \mathbb{E}S_0 = 0$. Als Korollar können wir folgern, dass $\mathbb{E}T = \infty$ sein muss. In der Tat, wäre $\mathbb{E}T$ endlich, so könnten wir Satz 1.6.3, Teil (c), anwenden, was zu einem Widerspruch führen würde.

Historisch stand das Wort "Martingal" für eine waghalsige Strategie, z.B. für die Strategie, bei der man den Einsatz immer verdoppelt, bis man zum ersten Mal gewonnen hat.

Beispiel 1.6.7. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_i = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Unser Einsatz zwischen den Zeitpunkten $n-1$ und n sei 2^{n-1}. Gesamtgewinn zum Zeitpunkt n ist somit gegeben durch

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\xi_k.$$

Das ist ein Martingal. Sei nun $T = \min\{k \in \mathbb{N} : \xi_k = +1\}$ die erste Zeit, zu der man gewinnt. Dann gilt

$$X_T = -(1 + 2 + \ldots + 2^{T-2}) + 2^{T-1} = 1.$$

Der Gesamtgewinn bei dieser Ausstiegsstrategie ist also immer gleich 1.

Zum Schluss betrachten wir eine Anwendung von Martingalen auf die Berechnung der Austrittswahrscheinlichkeit einer einfachen Irrfahrt.

Beispiel 1.6.8. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_n = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Wir betrachten die einfache Irrfahrt

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad S_0 = 0.$$

Seien $-a < 0 < b$ und sei $T = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = -a \text{ oder } S_n = +b\}$ die erste Austrittszeit der Irrfahrt aus dem Intervall $(-a, b)$. Wir werden zeigen, dass

$$\mathbb{P}[S_T = -a] = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbb{P}[S_T = b] = \frac{a}{a+b}.$$

Der gestoppte Prozess $(S_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal. Dieses Martingal ist gleichmäßig beschränkt, denn $-a \leq S_{T\wedge n} \leq b$. Satz 1.6.3 (a) ergibt $\mathbb{E} S_{T \wedge T} = 0$, also $\mathbb{E} S_T = 0$. Da aber S_T nur die Werte $-a$ und b annehmen kann, ergibt sich

$$0 = \mathbb{E} S_T = -a\mathbb{P}[S_T = -a] + b(1 - \mathbb{P}[S_T = -a]) = 0.$$

Daraus folgt $\mathbb{P}[S_T = -a] = \frac{b}{a+b}$. Die zweite Formel ergibt sich aus $\mathbb{P}[S_T = b] = 1 - \mathbb{P}[S_T = -a]$.